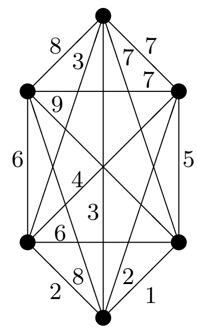
Graphes & Algorithmes	Dept Informatique, Univ Evry

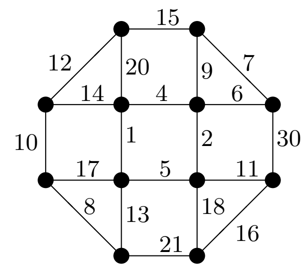
TD 4: Arbres couvrants de poids minimum

Responsable: Nguyễn Kim Thắng *18 Mars 2022*
Chargés de TDs: Tuan Anh Nguyen, Nguyễn Kim Thắng

Exercice 1 Kruskal et Prim

Faire tourner l'algorithme de Kruskal et celui de Prim sur les graphes suivants:





Exercice 2 Algorithme de recouvrement minimum

Algorithme: Soit $G = (V, E, w)$ un graphe (non orienté) connexe, pondéré. Soient T et W un ensemble d'arête et un ensemble de sommet initialement vides. Soit s un sommet quelconque, on ajoute s à W. On choisit un arête incidente à s, de coût minimum, qu'on ajoute à T. Soit x l'autre extrémité de l'arête, on ajoute x à W. On recommence avec ce sommet x: on cherche une arête $e = (x, y)$ de coût minimum tel que $y \notin W$ et on l'ajoute e à T et y à W, et ainsi de suite. On s'arrête quand T à $n - 1$ arêtes.

L'arbre T renvoyé par l'algorithme précédent est-il un arbre de recouvrement minimum de G? Si oui expliquez pourquoi, sinon construisez un contre-exemple.

Exercice 3 Propriétés des arbres couvrants minimals

1. Montrez que s'il existe une seule arête de poids minimal, alors elle appartient à tous les arbres couvrants du graphe.

2. Montrez que si les poids sur les arêtes sont tous différents, alors il y a unicité de l'arbre couvrant de poids minimum.

3. S'il y a l'unicité de l'arbre couvrant T minimal, peut-il y avoir deux arêtes de même poids ? En particulier, peut-il y avoir deux arêtes de même poids (1) qui sont toutes les deux dans T (2) dont aucune n'est dans T, (3) dont une seule est dans T ?

Exercice 4 Mise à jour

1. Soit T un arbre couvrant de poids minimal pour un graphe $G = (V, E)$ muni d'une pondération w. Soit V' un sous-ensemble de V, et T' l'ensemble des arêtes de T dont les deux extrémités appartiennent a V'. Montrer que si (V', T') est connexe, alors T' est un arbre couvrant de poids minimal pour le sous-graphe induit par V' dans G muni de w.

2. Un graphe $G = (V, E)$ et une ponderation w sont donnes. Soit a une arête de G, on note G_a le graphe G privé de l'arête a. i.e. $G_a = (V, E - \{a\})$. La pondération est conservée pour G_a. On suppose que G_a (et donc a fortiori G) est connexe.

   On dispose de T_a un arbre couvrant minimal pour G_a. Comment calculer rapidement un arbre couvrant minimal T pour G ?