Graphes & Algorithmes **Dept Informatique, Univ Evry**

TD 1: Premier contact avec les graphes

Responsable: Nguyễn Kim Thắng *14 Jan 2021*
Chargés de TDs: Tuan-Anh Nguyen et Nguyễn Kim Thắng

Exercice 1 Sommets, Arêtes, Arcs, Degrés

1. Quel est le nombre d'arêtes (arcs) d'un graphe non-orienté (orienté) complet de n sommets?
2. Quel est le nombre d'arêtes d'un graphe non-orienté bipartie $G(V_1, V_2, E)$ de n sommets (i.e., $|V_1| + |V_2| = n$)? Montrer que $|E| \leq n^2/4$.
3. Soit $G(V, E)$ un graphe de n sommets et m arêtes. Soient $d_1, d_2, \ldots, d_n$ les degrés du graphe. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$.
4. Montrer que dans un graphe $G(V, E)$ il y a toujours un nombre pair de sommets de degré impair.
5. Les nombres $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ representent respectivement les degrés minimum et maximum d'un graphe $G(V, E)$, ou $n = |V|$ et $m = |E|$. Montrer que $\delta(G) \leq 2m/n \leq \Delta(G)$.
6. Montrer que tout graphe (simple) avec au moins deux sommets possède au moins deux sommets de même degré.

Exercice 2 Distance

Soit $G(V, E)$ un graphe non-orienté et $d : V \times V \to \mathbb{R}$ la fonction de distances, i.e., $d(u, v)$ est la distance entre deux sommets u et v quelconques. Montrez que pour tout sommets u, v, w, on a: $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

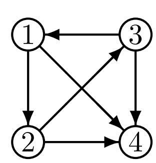
R. Union des deux chemins P_1 qui relie u, w et P_2 qui relie w, v est un chemin reliant u, v. D'où vient l'inégalité.

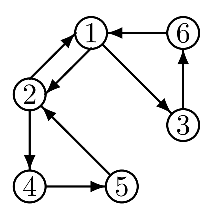
Exercice 3 Arbres et feuilles

Démontrer qu'un arbre à $n \geq 2$ sommets a au moins deux feuilles. (Rappel: une *feuille* est un sommet de degré 1.)

Exercice 4 Représentation

Soient les graphes $G_1(V_1, E_1)$ et $G_2(V_2, E_2)$ suivants.





1. Donner les matrices d'adjacence M_1 et M_2 des graphes G_1 et G_2, respectivement.
2. Que représentent les matrices M^p et $\widehat{M} = M \oplus M^2 \oplus \ldots \oplus M^n$ où n est le nombre de sommets du graphe M et $1 \leq p \leq n$? Comment s'en servir pour savoir si le graphe est sans circuit?

Exercice 5 Hypercubes

Un *n–cube* (ou *hypercube* de dimension n) est un graphe dont les sommets représentent les elements de $\{0,1\}^n$ et deux sommets sont adjacents si et seulement si les n–uplets correspondants different en exactement une composante.

1. Representer le n–cube, pour chaque $n \leq 4$
2. Comment obtenir le n–cube a partir du $(n-1)$–cube ?
3. Montrez que le n–cube est biparti.
4. Combien le n–cube possède-t-il de sommets ?
5. Quel est le degré des sommets (montrez que le n–cube est *regulier*).
6. Quel est le nombre d'arêtes ?

Exercice 6 Récurrences
On dit qu'un *arbre binaire* est un arbre enraciné dans lequel chaque noeud a soit 2 fils, soit aucun. On considère la proposition $\mathcal{Q}$ suivante:

Proposition $\mathcal{Q}$ Dans un arbre binaire de profondeur p, toutes les feuilles sont à la profondeur p.

Un étudiant propose de montrer $\mathcal{Q}$ par récurrence sur la profondeur de l'arbre: C'est vrai si l'arbre est de profondeur 0 (c'est l'arbre réduit à une feuille). Supposons $\mathcal{Q}$ vraie pour les arbres de profondeur p. On construit alors un arbre A de profondeur $p+1$ en prenant la racine, en mettant à sa gauche un sous-arbre AG de profondeur p et à sa droite un arbre AD de profondeur p. A est bien de profondeur $p+1$. Par hypothèse de recurrence, toutes les feuilles de AG et de AD sont a profondeur p dans AG et dans AD. Elles sont donc a profondeur $p+1$ dans A. Comme il n'y a pas dans A d'autres feuilles que celles de AG et de AD, le résultat est prouvé.

La proposition $\mathcal{Q}$ étant clairement fausse, quelle est l'erreur de l'étudiant?

1 Révision

Definition 1.1. Etant donné les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

- La fonction f est *inclue* dans la classe $O(g)$, c.a.d $f \in O(g)$ ou $f = O(g)$, s'il existe un entier n_0 et une constante $c > 0$ tels que $f(n) \leq c \cdot g(n)$ pour tout $n \geq n_0$.

  Si $f \in O(g)$, on dit que f croît (asymptotiquement) moins vite que g ou bien le taux de croissance de f est au plus celui de g.

- La fonction f est *inclue* dans la classe $\Omega(g)$, c.a.d $f \in \Omega(g)$ ou $f = \Omega(g)$, s'il existe un entier n_0 et une constante $c > 0$ tels que $f(n) \geq c \cdot g(n)$ pour tout $n \geq n_0$.

  Si $f \in \Omega(g)$, on dit que f croît (asymptotiquement) plus vite que g ou bien le taux de croissance de f est au moins celui de g.

- La fonction f est *inclue* dans la classe $\Theta(g)$, c.a.d $f \in \Theta(g)$ ou $f = \Theta(g)$, si $f \in O(g)$ et $f \in \Omega(g)$.

  Si $f \in \Theta(g)$, on dit que le taux de croissance de f est similaire à celui de g.

Exercice 7
En utilisant les définitions, justifiez

1. $6n^2 + 5n - 7 \in O(n^2)$ mais $6n^2 + 5n - 7 \notin O(n)$.
2. $2^n \in \Omega(n^{10})$ mais $2^n \notin \Omega(3^n)$.
3. $2018n^{20} + 10n^9 \in \Theta(n^{20})$.

Exercice 8
Etant donné les fonctions f et g croissantes telles que $f(n) \in O(g(n))$.
Est-ce que $f(n) \cdot \log(f(n)^c) \notin O(g(n) \log g(n))$? (où c est un constant positive.)

1. Parfois oui, parfois non, dépendant de la constante c.
2. Vrai.
3. Parfois oui, parfois non, dépendant des fonctions f et g.
4. Faux.

Exercice 9
Etant donné fonctions f et g croissantes telles que $f(n) \in O(g(n))$.
Est-ce que $2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$?

1. Parfois.
2. Jamais.
3. Oui, si $f(n) \leq g(n)$ pour n suffisamment grand.
4. Toujours.

Exercice 10
Classez les fonctions suivantes dans l'ordre croissant des taux de croissance.

1. $\sqrt{n}$
2. 10^n
3. $n^{1.5}$
4. $2^{\sqrt{\log n}}$
5. $n^{5/3}$