Algorithmique avancée
Le Token Game

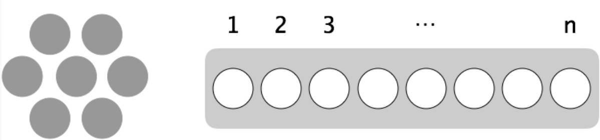
Denis TRYSTRAM
Notes de cours ENSIMAG Alternants 2A

sept. 2021

Le Token Game

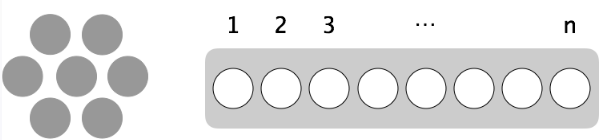
On considère un plateau composé de n positions circulaires, numérotées de 1 à n et n jetons (*tokens*).

Initialement, le plateau est vide.



Le Token Game

On considère un plateau composé de *n* positions circulaires, numérotées de 1 à *n* et *n* jetons (*tokens*).
Initialement, le plateau est vide.



Le jeu consiste à déterminer le processus pour placer les jetons sur le plateau, en plaçant ou retirant un jeton à la fois, en respectant les deux contraintes suivantes :

1. Position 1: Placer un jeton si le plateau est vide ou retirer le jeton qui s'y trouve.
2. Position juste droite de la première position vide. Mettre un jeton si elle est vide ou retirer le jeton qui s'y trouve.

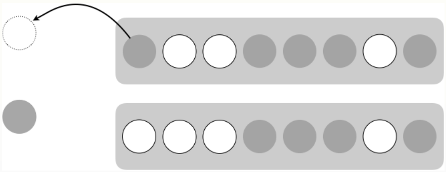


Figure: Règle 1: la position 1 contient un jeton, donc on le retire.

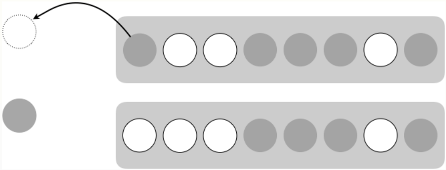


Figure: Règle 1: la position 1 contient un jeton, donc on le retire.

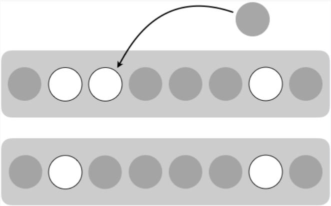


Figure: Règle 2: La position à droite de la première position vide (ici la 3) est vide, donc, on met un jeton.

Question

Comment le joueur doit-il choisir les mouvements successifs, de façon à remplir la plateau le plus vite possible?

Analyse

Quelques observations stratégiques

Il faut jouer sur des instances petites pour gagner de l'intuition.

Analyse

Quelques observations stratégiques

Il faut jouer sur des instances petites pour gagner de l'intuition.

- Si $n = 1$, le joueur doit simplement remplir le slot par un mouvement de Type-1.
- si $n = 2$, le joueur doit appliquer un mouvement de Type-2 suivi d'un Type-1.
- L'observation suggère plus généralement de commencer par un mouvement de Type-1 si n est impair et un Type-2 quand n est pair.
- Une autre observation simple est:
  le joueur ne doit jamais faire deux mouvements de même type à la suite.

Analyse (2)

Une stratégie commence à émerger:

1. Choisir le mouvement initial selon la parité de n.
2. Puis, alterner entre les deux mouvements possibles.

Analyse (2)

Une stratégie commence à émerger:

1. Choisir le mouvement initial selon la parité de n.
2. Puis, alterner entre les deux mouvements possibles.

Cette stratégie est particulièment simple, MAIS:
(a) Conduit-elle vraiment à l'état final voulu ?
(b) Quelle est son coût ?

Les réponses peuvent être obtenues si l'on re-exprime le processus récursivement.

Analyse (3)

Un jeton ne peut être placé sur le dernier slot que par un mouvement de Type-2.

[1] on remarquera que $n - 2$ a la même partité que n.

Analyse (3)

Un jeton ne peut être placé sur le dernier slot que par un mouvement de Type-2.

Pour que ce mouvement soit valide, le plateau doit être dans la configuration suivante :

$$\Big[\text{jetons en positions } 1, 2, \ldots, n-2\Big], \Big[\text{vides dans } n-1 \text{ et } n\Big]$$

Cette configuration impose que les $n-2$ premiers slots aient tous été remplis.[1]

Une fois que cette configuration a été obtenue, le jeton en position n est bien placé et ne sera plus jamais changé.

[1]on remarquera que $n-2$ a la même partité que n.

Analyse (3)

Un jeton ne peut être placé sur le dernier slot que par un mouvement de Type-2.

Pour que ce mouvement soit valide, le plateau doit être dans la configuration suivante :

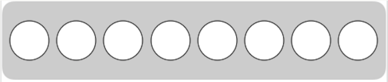
$$\left[\text{jetons en positions } 1, 2, \ldots, n-2\right], \left[\text{vides dans } n-1 \text{ et } n\right]$$

Cette configuration impose que les $n-2$ premiers slots aient tous été remplis.[1]

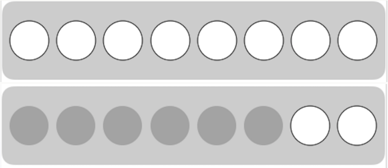
Une fois que cette configuration a été obtenue, le jeton en position n est bien placé et ne sera plus jamais changé.
On peut maintenant écrire la recursion!

[1] on remarquera que $n-2$ a la même partité que n.

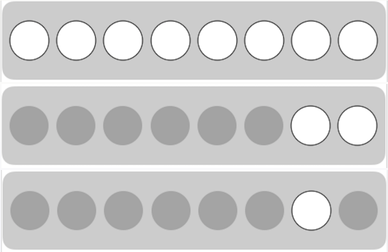
Analyse (4)



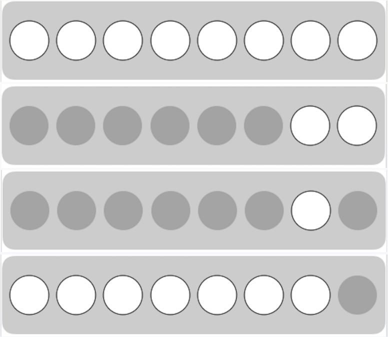
Analyse (4)



Analyse (4)



Analyse (4)



Analyse (4)

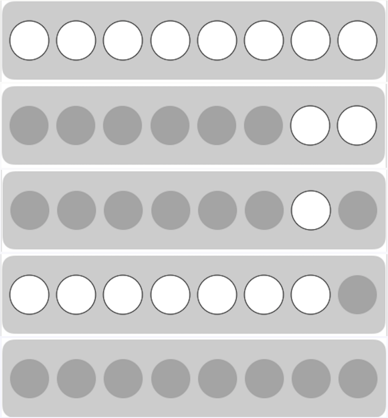


Figure: Schéma de la version récursive du jeu.

Coût de la solution (1)

Opération de base : placer/retirer un jeton.
$f(k)$ est le coût pour placer les k premiers jetons.

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } \ n = 1 \\ 2 & \text{if } \ n = 2 \\ f(n-2) \ + \ 1 \ + \ f^{-1}(n-2) \ + \ f(n-1) & \text{if } \ n > 2 \end{cases} \tag{1}$$

où f^{-1} exprime l'opération de vidage.

Liens entre f et f^{-1}

Raisonnons en termes d'opérations miroir. On obtient facilement la solution récursive pour vider le plateau :

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n = 1 \\ 2 & \text{if} \quad n = 2 \\ f^{-1}(n-1) \; + \; f(n-2) \; + \; 1 \; + \; f^{-1}(n-2) & \text{if} \quad n > 2 \end{cases} \tag{2}$$

Liens entre f et f^{-1}(*suite*)

Calculons la différence entre (1) et (2).

$$
\begin{aligned}
f(n) - f^{-1}(n) &= f(n-2) + 1 + f^{-1}(n-2) + f(n-1) \\
&\quad - f^{-1}(n-1) - f(n-2) - 1 - f^{-1}(n-2) \\
&= f(n-1) - f^{-1}(n-1) \\
&\qquad \dots \\
&= f(1) - f^{-1}(1) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Les coûts $f(n)$ et $f^{-1}(n)$ sont égaux !

Coût de la solution (2)

L'équation finale (simplifiée) est :

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n = 1 \\ 2 & \text{if} \quad n = 2 \\ f(n-1) + 2f(n-2) + 1 & \text{if} \quad n > 2 \end{cases} \tag{3}$$

Résoudre la récurrence

On peut une nouvelle fois simplifier la récurrence en remplaçant la fonction f par:

$$g(n) = f(n) + f(n-1) \quad \text{for} \quad n \geq 2$$

Résoudre la récurrence

On peut une nouvelle fois simplifier la récurrence en remplaçant la fonction f par:

$$g(n) \;=\; f(n) \;+\; f(n-1) \quad \text{for} \quad n \geq 2$$

Aprés quelques manipulations simples, on obtient :

$$g(n) \;=\; \begin{cases} 3 & \text{if} \quad n = 2 \\ 2g(n-1) + 1 & \text{if} \quad n > 2 \end{cases} \tag{4}$$

Nous sommes ainsi passés d'une équation bilinéaire sur f à une forme linéaire sur g (plus simple).

On résout cette équation par sommation d'une série géométrique (de raison 2) :

$$g(n) \;=\; 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 \;=\; 2^n - 1 \quad (5)$$

Retournons maintenant à l'évaluation de $f(n)$ au regard de l'analyse faite sur $g(n)$.

$$f(n) = \begin{cases} 1 & & & \text{if} \quad n = 1 \\ g(n) - f(n-1) & = & (2^n - 1) - f(n-1) & \text{if} \quad n > 1 \end{cases} \tag{6}$$

Il s'agit une fois encore d'une récuurrence linéaire sur laquelle on peut employer les techniques des sries géométriques.

Développons l'expression pour discerner le motif sous jacent...

$$\begin{aligned} f(n) &= 2^n - 2^{n-1} + f(n-2) + 1 - 1 \\ &= 2^n - 2^{n-1} + 2^{n-2} - f(n-3) - 1 \\ &= 2^n - 2^{n-1} + 2^{n-2} - 2^{n-3} + f(n-4) + 1 - 1 \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

On distingue deux expressions finales selon la parité :

$$\text{Valeurs paires de } n : \quad f(n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \, 2^k \tag{7}$$

$$\text{Valeurs impaires de } n : \quad f(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \, 2^k \tag{8}$$

Regroupons tout d'abord les termes positifs et négatifs.
Cas de n impair:

$$\begin{aligned} f(n) &= \left(2^n + 2^{n-2} + \cdots + 2\right) - \left(2^{n-1} + 2^{n-3} + \cdots + 1\right) \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-3} + \cdots + 1 \\ &= 2^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= 2^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^{(n-1)/2}}\right) \end{aligned}$$

Regroupons tout d'abord les termes positifs et négatifs.
Cas de n impair:

$$\begin{aligned}
f(n) &= \left(2^n + 2^{n-2} + \cdots + 2\right) - \left(2^{n-1} + 2^{n-3} + \cdots + 1\right) \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-3} + \cdots + 1 \\
&= 2^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
&= 2^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^{(n-1)/2}}\right) \\
&= 2^{n-1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{(n+1)/2}\right) \\
&= \frac{2^{n+1}}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^{n+1} - 1\right)
\end{aligned}$$

La touche finale

Pour tout n, $f(n)$ est donnée par la formule suivante :

$$f(n) = \begin{cases} \left(2^{n+1} - 1\right)/3 & \text{pour } n \text{ impair} \\ \left(2^{n+1} - 2\right)/3 & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases} \tag{9}$$