Algorithmique Avancée
Nombres Nobles

Denis TRYSTRAM

Exercices

sept. 2022

Définition

On dit qu'un nombre est *noble* s'il est divisible par chacun des chiffres qui le compose – dans la notation (classique) en base 10.
Exemple:
135 est noble (car $135/1 = 135$, $135/3 = 45$ et $135/5 = 27$).
2022 ne l'est pas.

Définition

On dit qu'un nombre est *noble* s'il est divisible par chacun des chiffres qui le compose – dans la notation (classique) en base 10.
Exemple:
135 est noble (car $135/1 = 135$, $135/3 = 45$ et $135/5 = 27$).
2022 ne l'est pas.

Le travail demandé est d'écrire un algorithme, le plus *efficace* possible qui calcule le plus grand nombre noble existant.

- La question algorithmique peut se formuler comme chercher les permutations d'un ensemble de chiffres distincts ayant une propriété particulière...
- C'est un premier contact avec les méthodes de résolution exhaustives.

Eléments de réponse

Ici, les nombres se limitent à 9 chiffres (car 0 ne peut appartenir à un nombre noble) ce qui est "raisonnable" en terme de temps d'exécution, mais on peut faire beaucoup mieux.

Eléments de réponse

Ici, les nombres se limitent à 9 chiffres (car 0 ne peut appartenir à un nombre noble) ce qui est "raisonnable" en terme de temps d'exécution, mais on peut faire beaucoup mieux.

Quelques observations pour concevoir un algorithme efficace :

- Comme il est demandé de déterminer le plus grand nombre noble, il est plus opportun de commencer l'algorithme à partir du plus grand nombre possible :

  987654321

Limiter l'exploration

Une petite étude préliminaire montre qu'aucun nombre noble n'a plus de 7 chiffres.

- Nous avons déjà dégagé de 0, il reste donc les nombres à 9 chiffres.
  Mais une remarque simple montre qu'il ne peut avoir 9 chiffres, car en effet, un nombre noble ne peut contenir *à la fois* le chiffre 5 et un nombre pair
  sinon, il se terminerait par 0.
- Il ne peut avoir 8 chiffres, car en écartant 0 et 5, on remarque que la somme des chiffres restants est égale à 40,
  donc, ces nombres ne peuvent être des diviseurs de 9.

On peut trouver d'autres propriétés qui limiteraient encore l'exploration...

- En particulier, on essaye avec 7 chiffres en enlevant le 4 (il est *petit* et la somme des chiffres restants sera alors égale à 36 qui est divisible par $3, 6$ et 9).
- Autre remarque :
  les nombres nobles de plus de 5 chiffres sont tous pairs (le principe des cages à pigeons garantie qu'il y a bien un chiffre pair, donc, le nombre noble est divisible par un nombre pair).

On peut aussi montrer *à la main* que les nombres à 7 chiffres commençant par 987 (i.e. les plus grands) ne peuvent répondre au problème... Il reste ainsi très peu de combinaisons à tester !

La solution est : **9867312**

Take home message

- Cette analyse montre que finalement, il n'était pas nécessaire d'avoir recours à la programmation d'un algorithme.
- La programmation permet d'obtenir une "preuve" constructive incontestable, et aussi tous les nombres nobles.
- C'est bien entendu un exemple extrême, mais gardons bien en tête que l'analyse poussée permet toujours de limiter des calculs inutiles !