# Algorithmique Avancée
# Approximation – Problèmes de partitions

Denis TRYSTRAM
Notes de cours ENSIMAG Alternants 2A

Oct. 2022

# Un autre exemple : 2Partition

Version classique :

- 2Partition
- **Instance** : $n$ entiers $n_i$ et un entier pair $S = \Sigma_{1 \leq i \leq n} n_i$
- **Question** : Existe-t-il une partition des entiers en deux sous-ensembles $A_1$ et $A_2$ telle que $\Sigma_{i \in A_1} n_i = \Sigma_{i \in A_2} n_i$ ?

# Un autre exemple : 2Partition

Version classique :

- 2Partition
- **Instance** : $n$ entiers $n_i$ et un entier pair $S = \Sigma_{1 \leq i \leq n} n_i$
- **Question** : Existe-t-il une partition des entiers en deux sous-ensembles $A_1$ et $A_2$ telle que $\Sigma_{i \in A_1} n_i = \Sigma_{i \in A_2} n_i$ ?

## Sous forme d'optimisation

On cherche ici à réduire l'écart entre deux partitions d'entiers.
C'est donc un problème de minimum !
Notons $\omega$ la somme des entiers de la plus grande des deux partitions.
$n_{max}$ est l'entier le plus grand de l'instance.

# Approximation de 2Partition

- On considère l'algorithme glouton qui remplit à tour de rôle chaque sous-ensemble en mettant l'entier courant dans le sous-ensemble le moins chargé.

### Propriété

Cet algorithme a une approximation garantie.

# Analyse

L'analyse s'obtient à partir de deux **bornes inférieures**[1] de la solution optimale :

- On ne peut faire mieux qu'une découpe parfaite
  $\omega^* \geq \frac{\sum_j n_j}{2}$
- On ne peut faire moins que le plus grand entier
  $\omega^* \geq n_{max}$

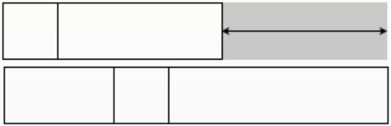
[1] c'est un problème de minimisation

# Analyse

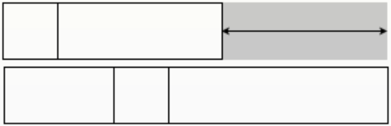
L'analyse s'obtient à partir de deux **bornes inférieures**[1] de la solution optimale :

- On ne peut faire mieux qu'une découpe parfaite
  $\omega^* \geq \frac{\sum_j n_j}{2}$
- On ne peut faire moins que le plus grand entier
  $\omega^* \geq n_{max}$

[1] c'est un problème de minimisation

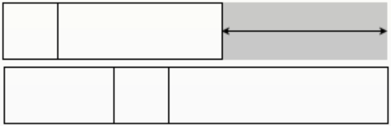


$$2 \cdot \omega = \Sigma_j n_j + S_{idle}$$



$$2 \cdot \omega = \Sigma_j n_j + S_{idle}$$

- $\omega = \frac{\Sigma_j n_j}{2} + \frac{1}{2} n_{max}$
- $\omega \leq \omega^* + \frac{1}{2}\omega^*$



$2 \cdot \omega = \Sigma_j n_j + S_{idle}$

- $\omega = \frac{\Sigma_j n_j}{2} + \frac{1}{2} n_{max}$
- $\omega \leq \omega^* + \frac{1}{2}\omega^*$

On obtient ainsi une $\frac{3}{2}$-approximation de l'optimum.

# Tightness

La question ici est d'étudier si la borne d'approximation précédente est la meilleure que l'on puisse obtenir.

On considère l'instance suivante :

- 3 entiers : 1,1 et 2.
- Optimal : $\omega^* = 2$ (les deux "1" d'un coté et le "2" de l'autre)
- Glouton partionne avec "1" d'un coté et "1" suivi de "2" de l'autre,
  donc, $\omega = 3$

Le pire cas est donc atteint par cette instance particulière.