Le problème du charpentier

*Denis TRYSTRAM*

*Notes de cours* **Algorithmique avancée**

*ENSIMAG 2A - filière Alternance, octobre 2018*

---

## Le maître charpentier

On s'intéresse ici au problème d'un charpentier un peu farfelu qui cherche à ranger son *mètre* dans un fourreau. Le mètre étant constitué d'un ensemble de segments de longueurs différentes assemblés chacun par une extrémité à celui qui précède et qui peuvent se replier l'un sur l'autre.

**MètreCharpentier**
**Instance** : $n$ segments consécutifs décrits par des entiers $s_i$ et un entier $B$ (la longueur du fourreau).
**Question** : Est-il possible de replier les segments de telle sorte que l'ensemble puisse être rangé dans le fourreau ?

Ce problème est NP-complet. La preuve est obtenue par une réduction à partir de 2Partition dont la définition est rappelée ci-dessous :

**2Partition.**
**Instance** : $n$ entiers $n_i$ dont la somme $S = \Sigma_{1 \leq i \leq n} n_i$ est paire.
**Question** : Existe-t-il une partition des entiers en deux sous-ensembles $A_1$ et $A_2$ telle que $\Sigma_{i \in A_1} n_i = \Sigma_{i \in A_2} n_i$ ?

- La vérification d'une solution de ce problème par le charpentier se fait en $\Theta(1)$ en rentrant simplement le mètre dans son fourreau. Pour un informaticien, on vérifie facilement la validité d'une solution repliée en $\mathcal{O}(n)$. Le problème est donc dans $\mathcal{NP}$.
- La réduction $\tau$ est la suivante :

  On transforme une instance $\mathcal{I}$ de 2Partition en une instance de MètreCharpentier à $n+4$ segments : dans l'ordre $s_{-1} = S$, $s_0 = \frac{S}{2}$, les $s_i = n_i$ pour $i$, $1 \leq i \leq n$, $s_{n+1} = \frac{S}{2}$ et $s_{n+2} = S$. On prend également $B = S$.

  On considère une instance positive de 2Partition. $\tau(\mathcal{I})$ est positive en repliant le second segment sur le premier, puis, tous les entiers de la partition $A_1$ sur la gauche et tous ceux de $A_2$ sur la droite. Ainsi, l'extrémité terminale du dernier des $n$ entiers de la partition se trouve au centre du fourreau, il suffit donc de replier le segment $n+1$ d'un coté, puis finalement le dernier $n+2$ du coté opposé.

Réciproquement, on considère une instance positive de MètreCharpentier transformée par $\tau$. Comme le premier segment a exactement la taille du fourreau, nécessairement le second est replié au dessus et se termine au centre du fourreau. Idem pour les deux derniers segments. Ainsi, les $n$ entiers de $\mathcal{I}$ sont exactement repliés autant à gauche que à droite, ce qui défini une partition en 2.