Algorithmique avancée
Couverture de sommets

Denis TRYSTRAM
Travaux dirigés ENSIMAG Alternants 2A

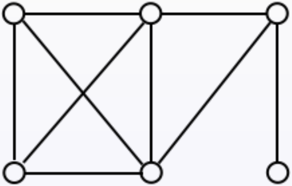
Sept. 2023

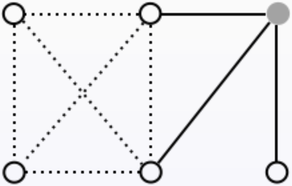
Présentation du problème

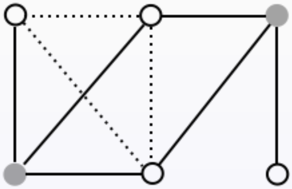
La couverture des sommets d'un graphe par ses arêtes.

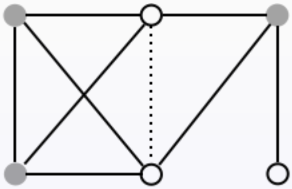
- **VC** (Vertex Cover) – décision
- **Instance.** Un graphe $G = (V, E)$ donné par exemple par sa matrice d'adjacence et un entier Q
- **Question.** Existe-t-il un ensemble V' d'au plus Q sommets qui couvrent G ?
  C'est-à-dire, tel que chaque arête de G a au moins une de ces extrémités dans V'.

Exemple

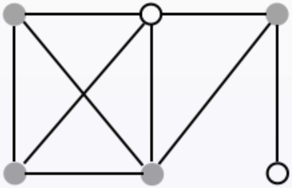








Couverture finale à 4 sommets



VC est NP-complet

On vérifie tout d'abord que VC est dans $\mathcal{NP}$.

C'est facile à partir de la représentation en matrice d'adjacence où chaque entrée non nulle représente une arête.

Réduction

On transforme une instance (positive) de 3SAT en instance de VC.

$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$

$C_i = x_{i,1} \vee x_{i,2} \vee x_{i,3}$
où $x_{i,j}$ est un littéral sur les variables propositionnelles $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$

Construction du graphe associé (les sommets)

- Une paire de sommets pour chaque variable propositionnelle étiquetés p_i et $\neg p_i$
- Un triplet de sommets pour chaque clause C_i

Le nombre de sommets est donc égal à $2n + 3m$

Construction du graphe associé (les arêtes)

- Une arête entre chaque p_i et $\neg p_i$
- Une arête entre chacun des trois sommets des triangles C_i
- Une arête entre chaque $x_{i,j}$ et le sommet p ou $\neg p$ représentant le littéral correspondant

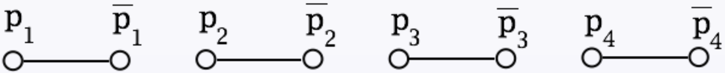
Le nombre d'arêtes est donc égal à $3m + 3m + n$

Construction du graphe associé (la constante Q)

Q est égal à $2m + n$

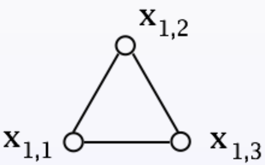
Exemple (4 variables propositionnelles)

$(p_2 \vee \neg p_1 \vee p_4) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4)$



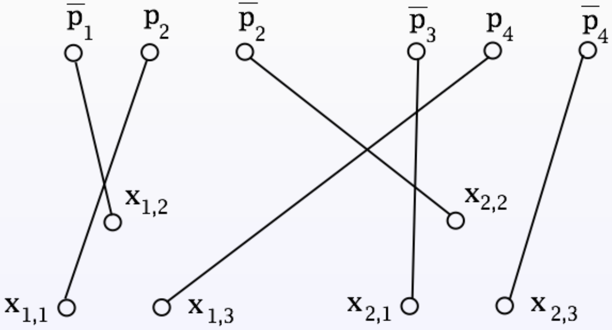
Exemple (2 triangles)

$$(p_2 \vee \neg p_1 \vee p_4) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4)$$



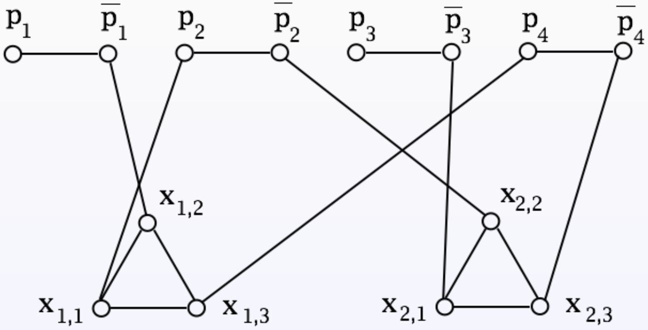
Exemple (Les associations x vers p)

$$(p_2 \vee \neg p_1 \vee p_4) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4)$$



Le graphe final

$$(p_2 \vee \neg p_1 \vee p_4) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4)$$



Preuve : ce qu'il faut démontrer

La transformation décrite est polynomiale.

Il faut montrer maintenant que l'instance de 3SAT est satisfiable si et seulement si le graphe ainsi généré a une couverture au plus $2m + n$.

Preuve

Si l'instance de 3SAT est satisfiable, alors il existe une fonction d'interprétation γ qui rend chaque clause C_i vraie.
La couverture comprend les sommets tels que

- γ affecte la valeur 1 à p_i et 0 à $\neg p_i$.
- 2 sommets pour chaque triangle, choisis tels que γ affecte 1 au littéral correspondant au sommet non choisi[1].

La taille de cette couverture est exactement $2m + n$.

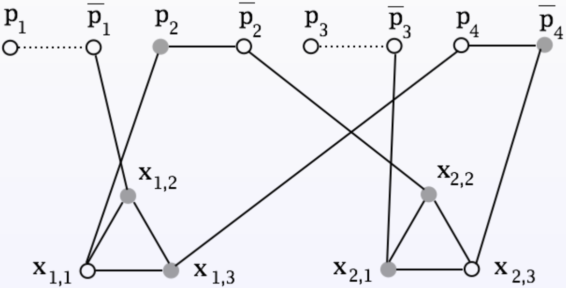
Il faut vérifier que toutes les arêtes sont bien convertes.

[1] ce qui est toujours possible

Une solution de VC

$(p_2 \vee \neg p_1 \vee p_4) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4)$

$(p_2 = 1, \neg p_4 = 1)$ est une solution (quels que soient p_1 et p_3).



Il reste à couvrir une des arêtes des paires restantes 1 et 3.

Réciproque

Si le graphe a une couverture de taille $2m + n$, alors celle-ci définit une fonction d'interprétation qui rend la formule vraie.
En effet :

- Une couverture de taille $2m + n$ a forcément un sommet dans chaque paire $(p_i, \neg p_i)$ et deux sommets pour chaque triangle. Elle ne peut en avoir plus sinon, la couverture serait plus que $2m + n$.
- Considérons la fonction d'interprétation qui affecte 1 à p_i si il est dans la couverture et 0 si $\neg p_i$ est dans la couverture. L'existence de cette couverture implique que la formule de 3SAT est satisfaite car la fonction d'interprétation affecte la valeur 1 à au moins un littéral de chaque clause.