Algorithmique avancée
Rappels et Token Game

Denis TRYSTRAM
ENSIMAG Alternants 2A

sept. 2023

Tour d'horizon du cours

Objectif

Maitriser les enjeux et principales techniques pour concevoir et analyser des algorithmes pour résoudre des problèmes difficiles.

- Rappels de quelques éléments pour l'analyse de coût
- Notations asymptotiques et calculs de sommations
- Un exercice pour tester : Résolution du *Token Game*

Notations asymptotiques

- Borne supérieure
  $f = O(g) \Leftrightarrow \exists C > 0 \; \exists n_0 > 0 \; \forall n > n_0 \; f(n) \leq Cg(n)$
- Borne inférieure
  $f = \Omega(g) \Leftrightarrow g = O(f)$
- $f = \Theta(g) \Leftrightarrow f = O(g)$ and $f = \Omega(g)$

Sommations

L'analyse de coût

de l'algorithme à l'arithmétique...

- Somme des n premiers entiers ?
- Somme tronquées ?
- Somme des carrés ?

Un outil de base : les séries géométriques

n est un nombre entier, $S_a(n) = \Sigma_{k=0,n} a^k = ?$

Un outil de base : les séries géométriques

n est un nombre entier, $S_a(n) = \Sigma_{k=0,n} a^k = ?$

$S_a(n) = \Sigma_{k=0,n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ for $a \neq 1$

Un outil de base : les séries géométriques

n est un nombre entier, $S_a(n) = \Sigma_{k=0,n} a^k = ?$

$S_a(n) = \Sigma_{k=0,n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ for $a \neq 1$

- $S_a(n) = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$
- $= 1 + a[1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}] + a^{n+1} - a^{n+1}$
- $= 1 + a \cdot S_a(n) - a^{n+1}$
- Ainsi, $(1-a)S_a(n) = 1 - a^{n+1}$

Un outil de base : les séries géométriques

n est un nombre entier, $S_a(n) = \Sigma_{k=0,n} a^k = ?$

$$S_a(n) = \Sigma_{k=0,n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ for } a \neq 1$$

- $S_a(n) = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$
- $= 1 + a[1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}] + a^{n+1} - a^{n+1}$
- $= 1 + a \cdot S_a(n) - a^{n+1}$
- Ainsi, $(1-a)S_a(n) = 1 - a^{n+1}$

Remarquons que la preuve classique suggère de multiplier directement $S_a(n)$ par $1-a$ et les éléments intermédiaires s'éliminent à 2...

Un cas particulier

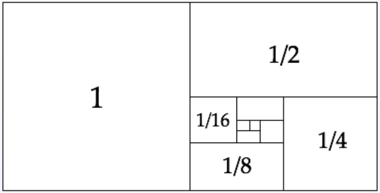
- Souvent, on obtient les résultats par des preuves différentes...

Quelle est la somme pour $a = \frac{1}{2}$?

Un cas particulier

- Souvent, on obtient les résultats par des preuves différentes...

Quelle est la somme pour $a = \frac{1}{2}$?



Série harmonique

Quelle est la valeur de $\Sigma_{k>0}\frac{1}{k}$?

$\Sigma_{k>0}f(k) = lim_{n\to\infty}\Sigma_{k=1,n}f(k)$
Obtenir une valeur finie pour une somme infinie a été un paradoxe pendant longtemps !
...jusqu'au calcul infinitésimal de Leibniz/Newton au XVIIth siècle.

- La somme est non bornée (elle tend vers $+\infty$).

Série harmonique

Quelle est la valeur de $\Sigma_{k>0}\frac{1}{k}$?

$\Sigma_{k>0}f(k) = lim_{n\to\infty}\Sigma_{k=1,n}f(k)$
Obtenir une valeur finie pour une somme infinie a été un paradoxe pendant longtemps !
...jusqu'au calcul infinitésimal de Leibniz/Newton au XVIIth siècle.

- La somme est non bornée (elle tend vers $+\infty$).
  Le résultat est obtenu en bornant la somme :
  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... > 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + ...$
  La somme infinie de terme constants est infinie (ici $\frac{1}{2}$).

Logarithmes: les fonctions d'échelle

Definition

b est la base (positive real number).
$log(x)$ est défini comme l'inverse de l'exponentiation $f(x) = b^x$:
$x = b^{log_b(x)}$

On peut établir toutes les propriétés du log à partir de cette définition.

Logarithmes: les fonctions d'échelle

Definition

b est la base (positive real number).
$log(x)$ est défini comme l'inverse de l'exponentiation $f(x) = b^x$:
$x = b^{log_b(x)}$

On peut établir toutes les propriétés du log à partir de cette définition.

- $log_b(x \cdot y) = log_b(x) + log_b(y)$
- $log_b(1) = 0$ est une conséquence de cette définition, pas une convention!
- $\log_a(x) = \log_a(b) \log_b(x)$

Aller un peu plus loin...

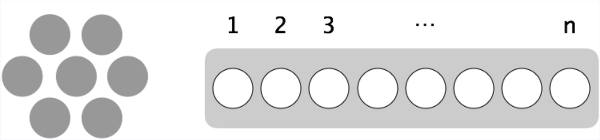
Une autre expression utile de $n^{\log_a(b)}$

- $n^{\log_a(b)} = b^{\log_a(n)}$

- Quel rapprot entre la série harmonique et le *log*?
- Lien avec l'intégrale de la fonction $1/x$

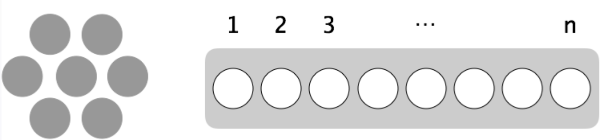
Le Token Game

On considère un plateau composé de n positions circulaires, numérotées de 1 à n et n jetons (*tokens*).
Initialement, le plateau est vide.



Le Token Game

On considère un plateau composé de n positions circulaires, numérotées de 1 à n et n jetons (*tokens*).
Initialement, le plateau est vide.



Le jeu consiste à déterminer le processus pour placer les jetons sur le plateau, en plaçant ou retirant un jeton à la fois, en respectant les deux contraintes suivantes :

1. Position 1: Placer un jeton si la case est vide ou retirer le jeton qui s'y trouve.
2. Position juste droite de la première position vide. Mettre un jeton si elle est vide ou retirer le jeton qui s'y trouve.

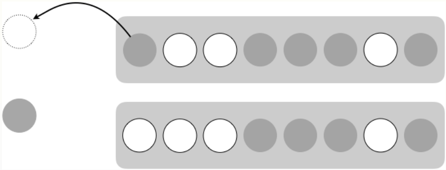


Figure: Règle 1: la position 1 contient un jeton, donc on le retire.

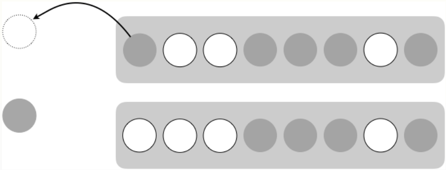


Figure: Règle 1: la position 1 contient un jeton, donc on le retire.

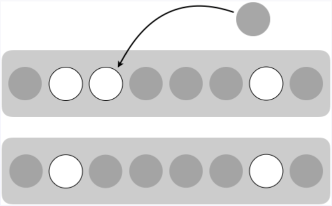


Figure: Règle 2: La position à droite de la première position vide (ici la 3) est vide, donc, on met un jeton.

Questions

- Ecrire l'algorithme pour choisir les mouvements successifs, de façon à remplir le plateau le plus vite possible.
- Prouver votre solution
- Analyser son temps d'éxécution

Analyse

Quelques observations stratégiques

Il faut jouer sur des instances petites pour gagner de l'intuition.

Analyse

Quelques observations stratégiques

Il faut jouer sur des instances petites pour gagner de l'intuition.

- Si $n = 1$, le joueur doit simplement remplir le slot par un mouvement de Type-1.
- si $n = 2$, le joueur doit appliquer un mouvement de Type-2 suivi d'un Type-1.
- L'observation suggère plus généralement de commencer par un mouvement de Type-1 si n est impair et un Type-2 quand n est pair.
- Une autre observation simple est:
  le joueur ne doit jamais faire deux mouvements de même type à la suite.

Analyse (2)

Une stratégie commence à émerger:

1. Choisir le mouvement initial selon la parité de n.
2. Puis, alterner entre les deux mouvements possibles.

Analyse (2)

Une stratégie commence à émerger:

1. Choisir le mouvement initial selon la parité de n.
2. Puis, alterner entre les deux mouvements possibles.

Cette stratégie est particulièment simple, MAIS:
(a) Conduit-elle vraiment à l'état final voulu ?
(b) Quelle est son coût ?

Les réponses peuvent être obtenues si l'on re-exprime le processus récursivement.

Analyse (3)

Un jeton ne peut être placé sur le dernier slot que par un mouvement de Type-2.

[1] on remarquera que $n - 2$ a la même partité que n.

Analyse (3)

Un jeton ne peut être placé sur le dernier slot que par un mouvement de Type-2.

Pour que ce mouvement soit valide, le plateau doit être dans la configuration suivante :

$$\Big[\text{jetons en positions } 1, 2, \ldots, n-2\Big], \Big[\text{vides dans } n-1 \text{ et } n\Big]$$

Cette configuration impose que les $n-2$ premiers slots aient tous été remplis.[1]

Une fois que cette configuration a été obtenue, le jeton en position n est bien placé et ne sera plus jamais changé.

[1] on remarquera que $n-2$ a la même partité que n.

Analyse (3)

Un jeton ne peut être placé sur le dernier slot que par un mouvement de Type-2.

Pour que ce mouvement soit valide, le plateau doit être dans la configuration suivante :

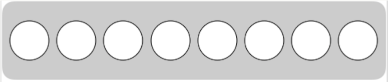
$$\big[\text{jetons en positions } 1, 2, \ldots, n-2\big], \big[\text{vides dans } n-1 \text{ et } n\big]$$

Cette configuration impose que les $n-2$ premiers slots aient tous été remplis.[1]

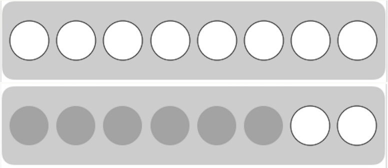
Une fois que cette configuration a été obtenue, le jeton en position n est bien placé et ne sera plus jamais changé.
On peut maintenant écrire la récursion !

[1] on remarquera que $n-2$ a la même partité que n.

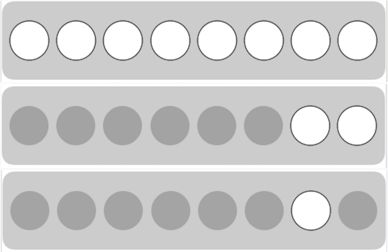
Analyse en images (4)



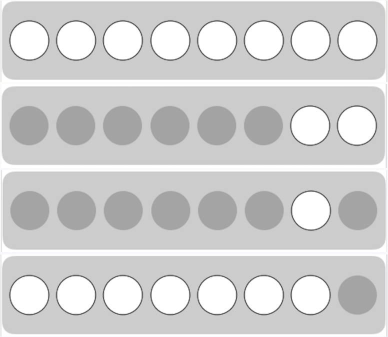
Analyse en images (4)



Analyse en images (4)



Analyse en images (4)



Analyse en images (4)

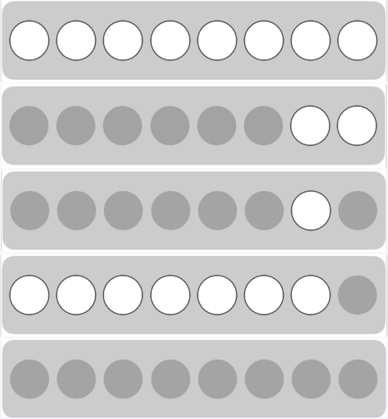


Figure: Schéma de la version récursive du jeu.

Coût de la solution (1)

Opération de base : placer/retirer un jeton.
$f(k)$ est le coût pour placer les k premiers jetons.

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } \; n = 1 \\ 2 & \text{if } \; n = 2 \\ f(n-2) \; + \; 1 \; + \; f^{-1}(n-2) \; + \; f(n-1) & \text{if } \; n > 2 \end{cases} \tag{1}$$

où f^{-1} exprime l'opération de vidage.

Liens entre f et f^{-1}

Raisonnons en termes d'opérations miroir. On obtient facilement la solution récursive pour vider un plateau plein :

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n = 1 \\ 2 & \text{if} \quad n = 2 \\ f^{-1}(n-1) + f(n-2) + 1 + f^{-1}(n-2) & \text{if} \quad n > 2 \end{cases} \tag{2}$$

Liens entre f et f^{-1}(*suite*)

Calculons la différence entre (1) et (2).

$$\begin{aligned}
f(n) - f^{-1}(n) &= f(n-2) + 1 + f^{-1}(n-2) + f(n-1) \\
&\quad - f^{-1}(n-1) - f(n-2) - 1 - f^{-1}(n-2) \\
&= f(n-1) - f^{-1}(n-1) \\
&\qquad \cdots \\
&= f(1) - f^{-1}(1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Les coûts $f(n)$ et $f^{-1}(n)$ sont égaux !

Coût de la solution (2)

L'équation finale (simplifiée) est :

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n = 1 \\ 2 & \text{if} \quad n = 2 \\ f(n-1) \; + \; 2f(n-2) + 1 & \text{if} \quad n > 2 \end{cases} \tag{3}$$

Coût de la solution (2)

L'équation finale (simplifiée) est :

$$f(n) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n = 1 \\ 2 & \text{if} \quad n = 2 \\ f(n-1) \;+\; 2f(n-2) + 1 & \text{if} \quad n > 2 \end{cases} \tag{3}$$

Il reste la résoudre...

Résoudre la récurrence

On peut simplifier la récurrence en remplaçant la fonction f par:

$$g(n) \; = \; f(n) \; + \; f(n-1) \quad \text{for} \quad n \geq 2$$

L'intuition derrière cette transformation vient directement de l'expression précédente de $f(n)$:

$$f(n) + f(n-1) \; = \; 2f(n-1) \; + \; 2f(n-2) + 1 \quad \text{if} \quad n > 2 \quad (4)$$

Aprés quelques manipulations simples, on obtient :

$$g(n) = \begin{cases} 3 & \text{if } \; n = 2 \\ 2g(n-1)+1 & \text{if } \; n > 2 \end{cases} \tag{5}$$

Nous sommes ainsi passés d'une équation bilinéaire sur f à une forme linéaire sur g (plus simple).

On résout cette équation par sommation d'une série géométrique (de raison 2) :

$$g(n) \;=\; 2^{n-1} \;+\; 2^{n-2} \;+\cdots+\; 2^2 \;+\; 2 \;+\; 1 \;=\; 2^n - 1 \quad (6)$$

Retournons maintenant à l'évaluation de $f(n)$ au regard de l'analyse faite sur $g(n)$.

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ g(n) - f(n-1) = (2^n - 1) - f(n-1) & \text{if } n > 1 \end{cases} \tag{7}$$

Il s'agit une fois encore d'une récurrence linéaire sur laquelle on peut employer les techniques des sries géométriques.

Développons l'expression pour discerner le motif sous jacent...

$$\begin{aligned} f(n) &= 2^n - 2^{n-1} + f(n-2) + 1 - 1 \\ &= 2^n - 2^{n-1} + 2^{n-2} - f(n-3) - 1 \\ &= 2^n - 2^{n-1} + 2^{n-2} - 2^{n-3} + f(n-4) + 1 - 1 \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

On distingue deux expressions finales selon la parité :

$$\text{Valeurs paires de } n : \quad f(n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \, 2^k \qquad (8)$$

$$\text{Valeurs impaires de } n : \quad f(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \, 2^k \qquad (9)$$

Regroupons tout d'abord les termes positifs et négatifs.
Cas de n impair:

$$\begin{aligned}
f(n) &= \left(2^n + 2^{n-2} + \cdots + 2\right) - \left(2^{n-1} + 2^{n-3} + \cdots + 1\right) \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-3} + \cdots + 1 \\
&= 2^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
&= 2^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^{(n-1)/2}}\right)
\end{aligned}$$

Regroupons tout d'abord les termes positifs et négatifs.
Cas de n impair:

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \left(2^n + 2^{n-2} + \cdots + 2\right) - \left(2^{n-1} + 2^{n-3} + \cdots + 1\right) \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-3} + \cdots + 1 \\
&= 2^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
&= 2^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^{(n-1)/2}}\right) \\
&= 2^{n-1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{(n+1)/2}\right) \\
&= \frac{2^{n+1}}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^{n+1} - 1\right)
\end{aligned}
$$

La touche finale

Pour tout n, $f(n)$ est donnée par la formule suivante :

$$f(n) = \begin{cases} \left(2^{n+1} - 1\right)/3 & \text{pour } n \text{ impair} \\ \left(2^{n+1} - 2\right)/3 & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases} \tag{10}$$