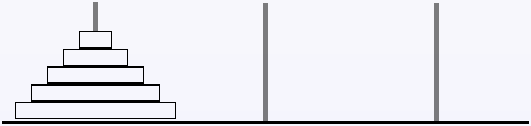
Algorithmique avancée
Variations sur les Tours de Hanoi

Denis TRYSTRAM
Notes de cours ENSIMAG Alternants 2A

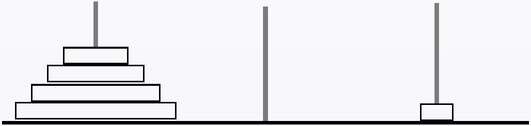
Sept. 2020

Présentation du problème

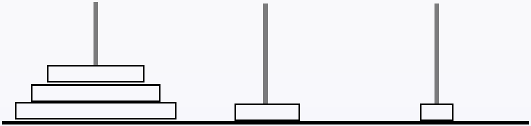
La version *historique* :
On cherche à déplacer une pile de disques concentriques d'un pieu à un autre sous la contrainte de **ne jamais déplacer un disque sur un autre de diamètre plus petit**.



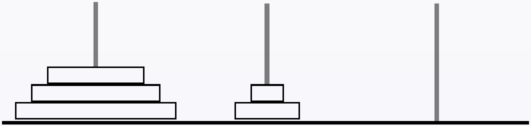
Etape 1.



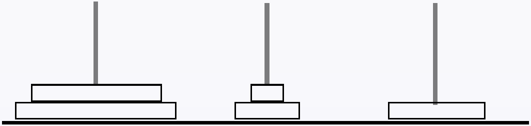
Etape 2.



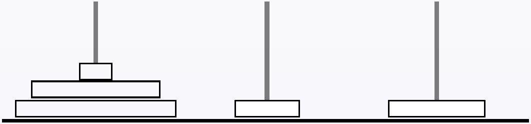
Etape 3.



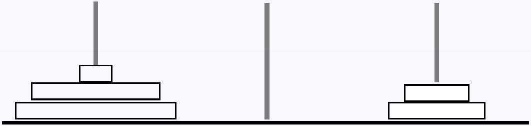
Etape 4.



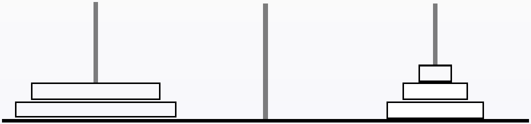
Etape 5.



Etape 6.



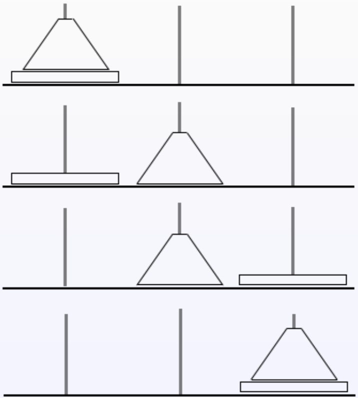
Etape 7.



Une stratégie commence à se dessiner ...

La stratégie de base

La résolution *naturelle*, inspirée par l'exemple, est résursive :



Codage et algorithme

On numérote les pieux.

Hanoi(n,0,2)

- si $n = 1$, déplacer le disque
- si $n \geq 2$
  - Hanoi($n - 1$,0,1)
  - déplacer le disque sur le pieu 1
  - Hanoi($n - 1$,1,2)

Analysis de coût

On évalue la stratégie en termes du nombre de déplacements élémentaires.

Borne inférieure

1. Au minimum, le disque le plus large bouge une fois.
2. La pile des $n-1$ disques au dessus bouge au minimum 2 fois.

$$h(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } \ n = 1 \\ 2 \cdot h(n-1) + 1 & \text{if } \ n > 1 \end{cases} \qquad (1)$$

Cette expression se résout facilement comme somme d'une série géométrique.

Analysis de coût (suite)

Le coût de la stratégie récursive précédente suit le même schéma, on obtient :

$h(n, 3) = 2^n - 1$

où l'on note $h(n, 3)$ le nombre de mouvements pour résoudre le puzzle de Hanoi pour n disques avec 3 pieux.
Cette stratégie est optimale.

Extension du problème à k pieux

L'algorithme étant optimal pour 3 pieux, une question intéssante est d'étudier le problème avec plus de pieux.
En particulier, dans quelle mesure peut-on réduire le caractère exponentiel du coût ?

Extension du problème à k pieux

L'algorithme étant optimal pour 3 pieux, une question intéssante est d'étudier le problème avec plus de pieux.
En particulier, dans quelle mesure peut-on réduire le caractère exponentiel du coût ?

Que se passe-t-il pour un nombre de pieux *illimité* ?

Extension : Politique linéaire

Si le nombre de pieux est égal au nombre de disques plus 1, il existe une politique optimale simple.

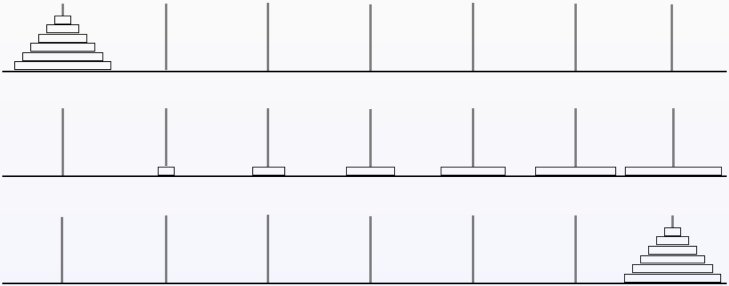


Figure: Illustration du principe pour $n = 6$.

Coût linéaire: $h(n, n+1) = 2 \cdot n - 1$

Extension du problème à k pieux

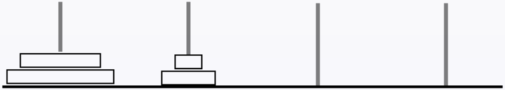
Cas d'un nombre limité de pieux.

Extension du problème à k pieux

Cas d'un nombre limité de pieux.

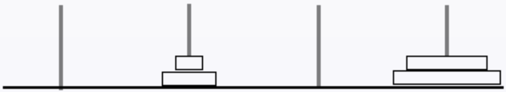
Que se passe-t-il pour $k = 4$?
On commence par une étude rapide de $n = 4$.

(meta) étape 1.

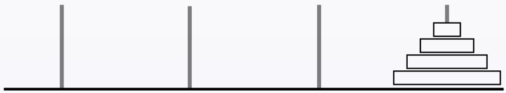


(meta) étape 2.

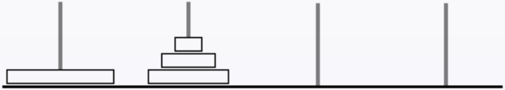
(meta) étape 3.



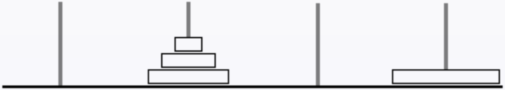
(meta) étape 4.



Autre stratégie de découpe



Autre stratégie de découpe (2)



Analyse de coût

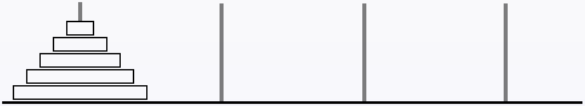
- **Découpe** $(2, 2)$
  Le coût de transfert d'une pile de 2 disques est $h(2, 4) = h(2, 3) = 3$.

  $h(4, 4) = 3 + 3 + 3 = 9$
- **Découpe** $(3, 1)$
  Le coût de transfert d'une pile de 3 disques est $h(3, 4) = 5$.

  $h(4, 4) = 5 + 1 + 5 = 11$

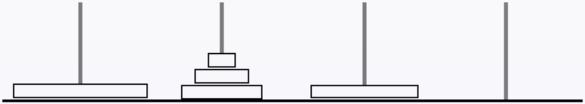
La meilleure stratégie est la première.

$n = 5$ et $k = 4$

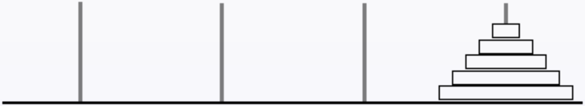


(meta) étape 1.

(meta) étape 2.



Etape 3.



Analyse de coût

Le coût de transfert d'une pile de 3 disques est $h(3, 4) = 5$ et d'une pile de 2 disques est $h(2, 3) = 3$.

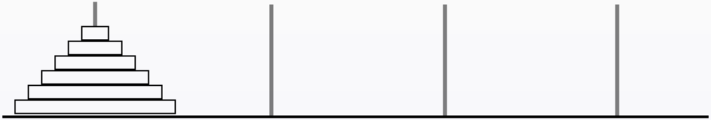
Analyse de coût

Le coût de transfert d'une pile de 3 disques est $h(3,4) = 5$ et d'une pile de 2 disques est $h(2,3) = 3$.

$h(5,4) = 5 + 3 + 5$
$h(5,4) = 13$

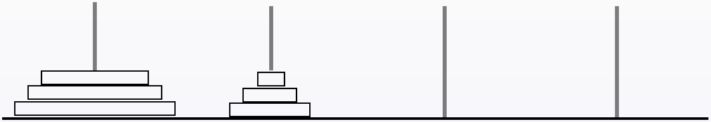
Ce sont deux politiques linéaires, elles sont optimales.

Hanoi(6,4)



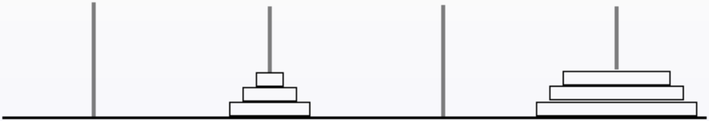
On peut découper la pile de plusieurs façons, examinons le cas de 2 groupes, chacun de taille 3 de haut en bas.

(meta) étape 1.



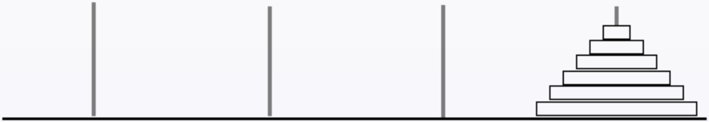
Cette étape est optimale (stratégie linéaire).

Etape 2.



On déplace 3 disques sur 3 pieux.

Etape 3.



Analyse de coût

Le coût de transfert d'une pile de 3 chacun des disques est $h(3,4) = 5$ et $h(3,3) = 7$.

Analyse de coût

Le coût de transfert d'une pile de 3 chacun des disques est $h(3,4) = 5$ et $h(3,3) = 7$.

$h(6,4) = 5 + 7 + 5$
$h(6,4) = 17$

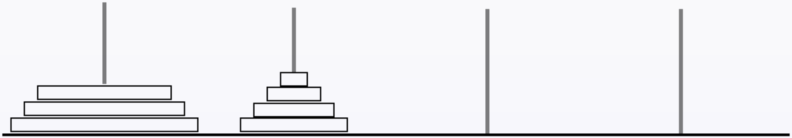
Ici, la première macro-étape est optimale (elle suit la stratégie linéaire), la seconde suit la stratégie exponentielle, elle est aussi optimale.

Cette découpe est la meilleure possible. Par exemple, $(4,2)$ est moins bonne:
$9 + 3 + 9 = 21$.

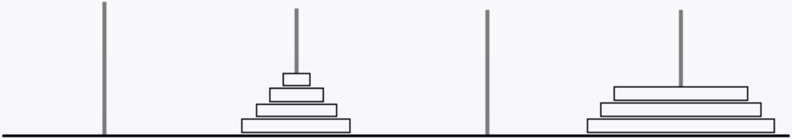
Hanoi(7,4)

On peut découper la pile de plusieurs façons en trois groupes : $(6,1)$, $(5,2)$, $(4,3)$ ou $(3,4)$, etc.

(meta) étape 1. Une première découpe.



Etape 2.



Etape 3.

Analyse de coût

Le coût de transfert de la pile de 4 disques est $h(4,4) = 7$ et celle des 3 disques restants sur les 3 pieux restants $h(3,3) = 7$.

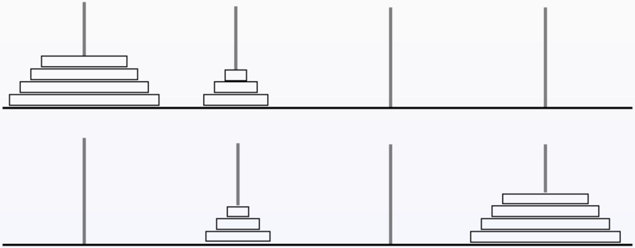
Analyse de coût

Le coût de transfert de la pile de 4 disques est $h(4,4) = 7$ et celle des 3 disques restants sur les 3 pieux restants $h(3,3) = 7$.

$h(7,4) = 7 + 7 + 7$
$h(7,4) = 21$

Essayons un autre regroupement : $(3,4)$

Une seconde découpe



Analyse de coût

Le coût de transfert d'une pile de 3 disques est $h(3, 4) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ plus le déplacement de 4 disques sur les 3 pieux restants $h(4, 3) = 2^4 - 1 = 15$.

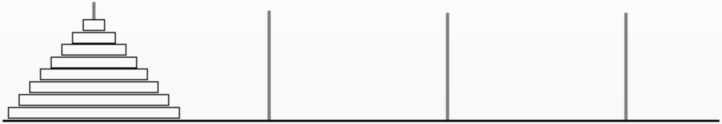
Analyse de coût

Le coût de transfert d'une pile de 3 disques est $h(3,4) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ plus le déplacement de 4 disques sur les 3 pieux restants $h(4,3) = 2^4 - 1 = 15$.

$h(7,4) = 15 + 5 + 15 = 25$

C'est la meilleure solution possible, les autres regroupements sont pires (on obtient 29 pour la découpe $(5,2)$)...

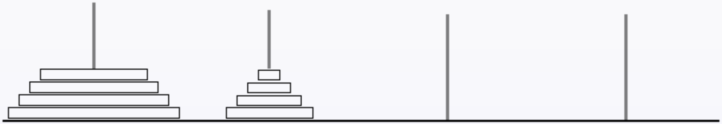
Hanoi(8,4)

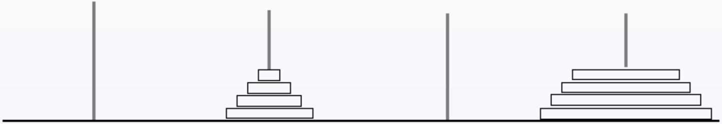


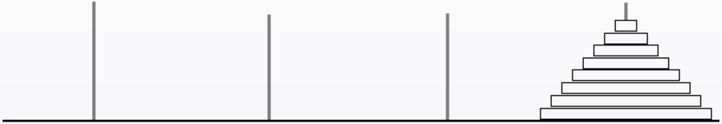
On peut découper la pile de plusieurs façons en trois groupes :

- $3, 5$
- $4, 4$
- $5, 3$
- etc.

(meta) étape 1. Découpe $(4, 4)$







Analyse de coût

Le coût de transfert d'une pile de 4 disques est $h(4,4) = 9$ et $h(4,3) = 2^4 - 1 = 15$ est le meilleur coût pour transférer les 4 restants avec 3 pieux, soit :

Analyse de coût

Le coût de transfert d'une pile de 4 disques est $h(4,4) = 9$ et $h(4,3) = 2^4 - 1 = 15$ est le meilleur coût pour transférer les 4 restants avec 3 pieux, soit :

$h(8,4) = 9 + 15 + 9$
$h(8,4) = 33$

Analyse de coût

Le coût de transfert d'une pile de 4 disques est $h(4,4) = 9$ et $h(4,3) = 2^4 - 1 = 15$ est le meilleur coût pour transférer les 4 restants avec 3 pieux, soit :

$h(8,4) = 9 + 15 + 9$
$h(8,4) = 33$

Une autre stratégie de découpe $(3,5)$ conduit à :
$h(3,4) = 5$ et $h(5,3) = 2^5 - 1 = 31$, soit au total :
$h(8,4) = 5 + 31 + 5 = 41$

L'autre stratégie de découpe $(5,3)$ conduit à :
$h(5,4) = 13$ et $h(3,3) = 7$, soit au total :
$h(8,4) = 13 + 7 + 13 = 33$

Bilan pour $k = 4$

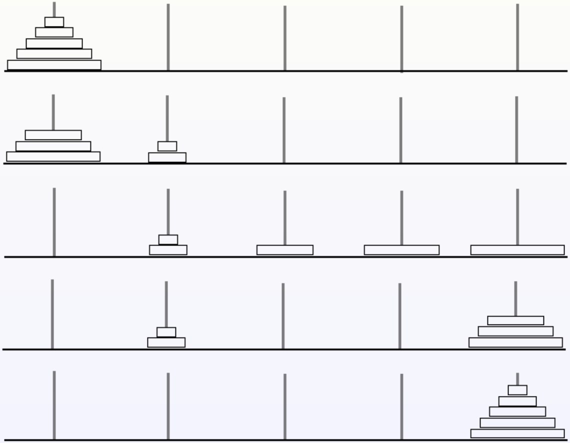
- $h(3,4) = 5$ – Optimal par la stratégie linéaire
- $h(4,4) = 9$ – découpage $(2,3)$
- $h(5,4) = 13$ – découpage $(3,2)$
- $h(6,4) = 17$ – découpage $(3,3)$
- $h(7,4) = 21$ – découpage $(4,3)$
- $h(8,4) = 33$ – découpages $(4,4)$ (ou $(5,3)$)

Cas de 5 pieux.

Etudions le nombre de mouvements en fonction du nombre de disques n.

Le problème de 4 disques est résolu (stratégie linéaire, optimale) : $h(4,5) = 2 \cdot 4 - 1 = 7$

$n = 5$

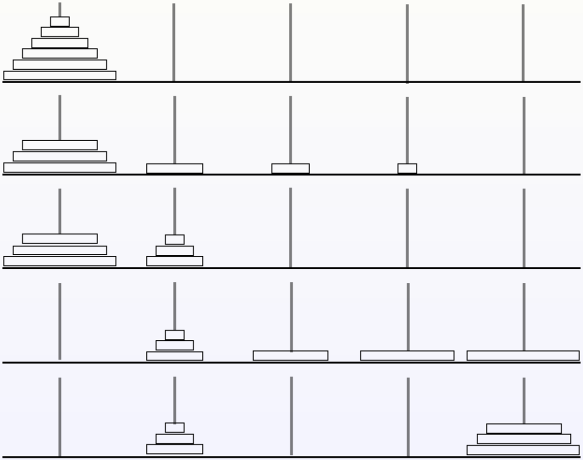


Coût pour $n = 5$

Le coût de déplacer une pile de 2 disques est 3, puis 3 disques est 5, soit :

$h(5, 5) = 3 + 5 + 3 = 11$

$n = 6$

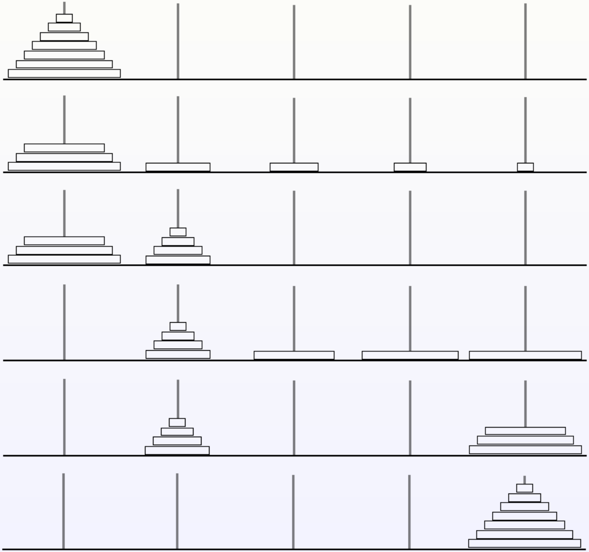


Coût pour $n = 6$

La stratégie ici est encore une succession de deux stratégies linéaires, avec des piles de 3 disques chacune :

$h(6, 5) = 5 + 5 + 5 = 15$

$n = 7$

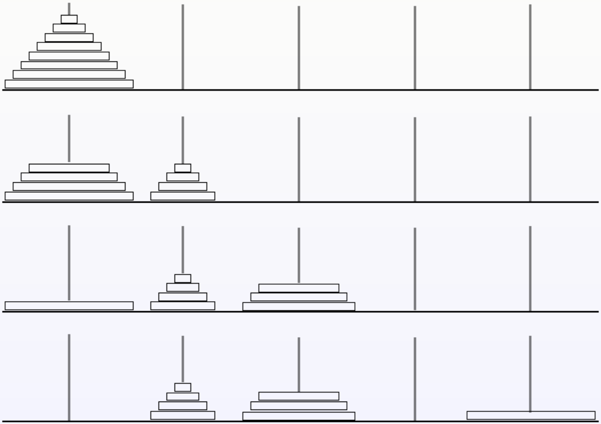


Coût pour $n = 7$, découpe $(4, 3)$

La stratégie ici est encore un mixte de stratégies linéaires :

$h(7, 5) = 7 + 5 + 7 = 19$

$n = 8$



Coût pour $n = 8$

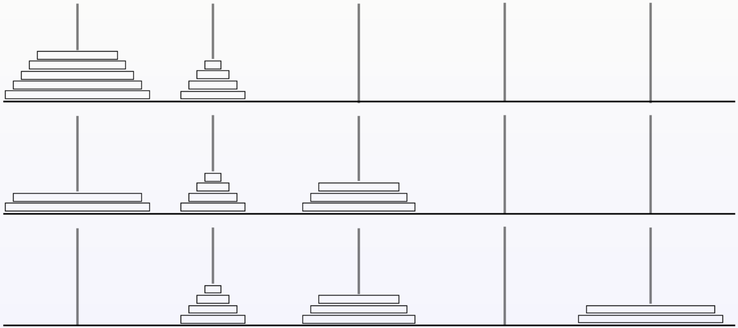
$h(8, 5)$
$= h(4, 5) + h(4, 4) + h(4, 5)$
$= 7 + 9 + 7 = 23$

On peut essayer d'autres regroupements. Que donne $(5, 3)$ ou $(3, 5)$?
Mais celui-ci est le meilleur.

$n = 9$

$n = 9$

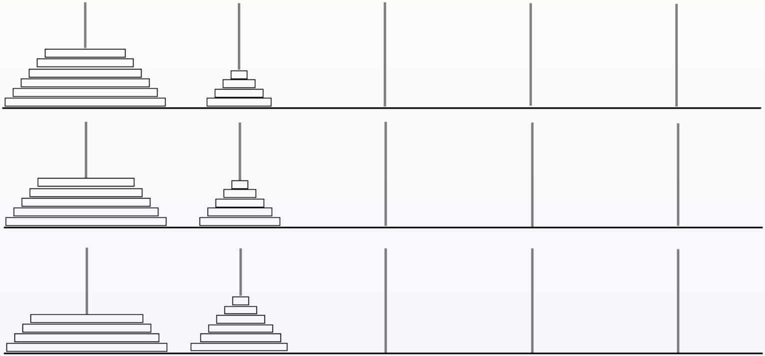
Possibilité par exemple : $(4, 5)$ (interprété comme $(4, 3, 2)$).



Coût $h(9, 5) = 2 \cdot h(4, 5) + h(5, 4) = 7 + 13 + 7 = 27$
Autre découpe $(5, 4)$: coût supérieur $11 + 7 + 11 = 29$.

$n = 10$

Lorsque le nombre de disques augmente, le problème se complexifie car les possibilités de découpes sont plus nombreuses.



Coût

- Découpe $(4, 6)$: 31
- Découpe $(5, 5)$: 35
- Découpe $(6, 4)$: 39

$n = 11$

Bilan pour $k = 5$

- $h(4,5) = 7$
- $h(5,5) = 11$
- $h(6,5) = 15$
- $h(7,5) = 19$
- $h(8,5) = 23$
- $h(9,5) = 27$
- $h(10,5) = 31$
- $h(11,5) = ?$

Généralisation – Analyse de coût

Comment sont obtenues ces valeurs ?

Trouvez une formule pour calculer le coût de transfert d'une pile de n disques pour une découpe en $(n - m, m)$.

Coder la résolution complète par Programmation Dynamique.
Bien entendu, on demande ici d'expliciter les mouvements.