Algorithmique avancée 2017

Denis Trystram

November 5, 2017

Préliminaire. Les grandes parties de cet examen sont indépendantes. Certaines questions sont difficiles, la notation en tient compte (sur 12).

1 Coloriage

$G = (V, E)$ désigne un graphe d'ordre n. Une k-coloration de G est une application qui associe à chaque sommet v_i de G une couleur (indexée dans $\{1, ..., k\}$) de telle façon que **les sommets adjacents ont des couleurs distinctes**. Ce problème peut également être vu comme une partition de l'ensemble des sommets V en k sous-ensembles disjoints V_1, ..., V_k correspondant aux sommets de même couleur. Chacun de ces sous-ensembles est appelé un *stable* (ou *independent set* en anglais). On s'intéresse à la résolution du problème suivant :

k-COLOR
Instance. Un graphe $G = (V, E)$ représenté par sa matrice d'adjacence, un entier k.
Question. Existe-t-il une k-coloration pour G ?

1.1 Complexité : 3-COLOR est NP-complet

On considère $k = 3$. La réduction se fait à partir de la variante *NAE-3SAT* de 3SAT (Not All Equal-3SAT) définie comme les formules qui possèdent une instantiation où toutes les clauses ont au moins un littéral VRAI et au moins un littéral FAUX.

Question 1. (2 pts)
Montrer que NAE-3SAT est NP-complet.

On construit maintenant une réduction de k-COLOR à partir de NAE-3SAT. On considère une instance (positive) ϕ de NAE-3SAT à n variables x_i et p clauses et on construit un graphe G_ϕ d'ordre $2n + 3p + 1$ de la façon suivante
On relie les sommets x_i à $\bar{x}_i$ $\forall i$, $1 \leq i \leq n$.
On relie toutes les variables x_i à un sommet y.

Pour chaque clause $C_j = l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee l_{j,3}$, on ajoute au graphe un *triangle* (graphe complet de 3 sommets A_j, B_j et C_j) et on les relie respectivement aux trois littéraux l_j d'une même clause[1].

Question 2. (1 pt) Construire le graphe correspondant à la formule suivante (4 variables booléennes et 3 clauses) :
$\phi = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x_3}) \wedge (x_3 \vee \bar{x_1} \vee \bar{x_4}) \wedge (\bar{x_2} \vee x_4 \vee \bar{x_3})$.

Question 3. (1 pt) Montrer que si $\phi \in$ NAE-3SAT, on obtient une 3-coloration du graphe G_ϕ à partir d'une instantiation valide de ϕ de la façon suivante :
y est colorié en vert, x_i (resp. $\bar{x_i}$) est colorié en rouge si la clause est vraie, en bleu sinon, finalement, on complète chaque triangle de clause avec les autres trois couleurs.

On suppose maintenant que G_ϕ est 3-colorié et que y est en vert.

Question 4. (1 pt) Montrer que si G_ϕ est une 3-coloration, alors ϕ est positive au sens de NAE-3SAT[2].
En déduire que 3-COLOR est $\mathcal{NP}$-complet.

1.2 Indice chromatique d'un graphe

Le nombre (ou indice) chromatique d'un graphe G, noté $\mathcal{X}(G)$, est le plus petit entier k pour lequel G admet une k- coloration.

Question 5. (1 pt) Déterminer l'indice chromatique du graphe de la figure 1. On justifiera la réponse.

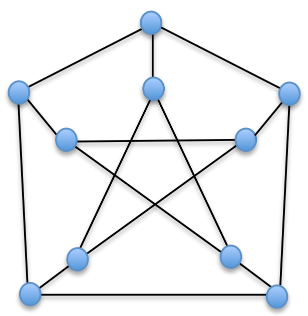

Figure 1: Exemple 1

[1] On rappelle ici que les littéraux sont des variables ou leur complémentaire

[2] Montrer que chaque triangle de clause est relié à un littéral rouge et un littéral bleu

1.3 Résolution exacte

Δ désigne le degré maximal du graphe G.
L'objectif ici est d'établir une borne supérieure de l'indice chromatique.

Question 6. (1 pt) Prouver que les graphes de degré maximum Δ sont ($\Delta+$ 1)-coloriables en utilisant un argument de borne inférieure et en construisant un algorithme de coloration polynomial.

On veut maintenant résoudre ce problème de façon exacte.

Question 7. (2 pts) Proposer une politique de séparation en considérant pour chaque sommet une assignation de couleur pour ce sommet. Que donne cette politique sur l'exemple 2 ?

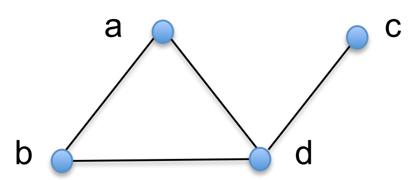

Figure 2: Exemple 2

Question 8. (1 pt) Quelle évaluation de borne des sous-arbres suggérez-vous pour couper des branches ?

1.4 Approximation de 3-COLOR

Un algorithme simple (glouton) de coloration (*First-Fit*) est le suivant :

- les sommets sont colorés dans l'ordre v1, ..., vn,
- pour colorier le sommet vi, on utilise la plus petite couleur possible (en d'autres termes, vi a la plus petite couleur non encore utilisée par les voisins de vi déjà coloriés).

Question 9. (2 pts) Construisez un exemple où First-Fit utilise un nombre arbitrairement grand de couleurs par rapport à l'indice chromatique.

Question 10. (1 pt) Que se passe-t-il si les sommets de G étaient triés par degrés décroissants ?

Question 11. (1 pt) Donner un algorithme polynomial pour le 2-coloriage de graphes bipartis (c'est-à-dire les graphes ne possédant pas de cycles impairs).

Question 12. (2 pts) En déduire un algorithme $\Theta(\sqrt{n})$-approximation[3].

1.5 Problèmes dérivés

Question 13. (1 pt) Montrer en construisant un algorithme que le problème *2-COLOR* est polynomial.

On définit alors *Max-2-COLOR* comme étant le problème prenant en entrée un graphe 2-coloriable et produisant en sortie une coloration telle que le nombre de sommets d'une couleur soit le plus grand possible.

Question 14. (2 pts) Quelle est la complexité de Max-2-COLOR ? On justifiera la réponse.

[3]on pourra remarquer que le voisinage d'un sommet dans un graphe 3-coloriable est 2-coloriable...